المحاضرة الثانية عملي :

-1- مثال: أوجد تقوس المنحني السلسلي $y = a\,ch\frac{x}{a}$ ، $a>0$

بشكل $y = a\,ch\frac{t}{a}$ ، $x = t$ ، $y = f(x)$

الحل:

$$k_1 = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \qquad x' = 1 \quad , \quad y' = sh\frac{t}{a}$$

$$x'' = 0 \quad , \quad y'' = \frac{1}{a}\,ch\frac{t}{a}$$

$$k_1 = \frac{\left|\frac{1}{a}ch\frac{t}{a} - 0\right|}{\left(1 + sh^2\frac{t}{a}\right)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{a}ch\frac{t}{a}}{ch^3\frac{t}{a}} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{ch^2\frac{t}{a}}$$

$1 - sh^2\theta = ch^2\theta$

طلب إضافي أوجد الإلتفاف ؟

حسب المبرهنة: إذا كان المنحني المعطى مستوياً فإن الإلتفاف من أجل نقطة يساوي الصفر.

- لإيجاد المعادلات المميزة لمنحني تنني إيجاد التقوس والإلتفاف بدلالة الوسيط الطبيعي s

تمرين: أوجد المعادلات المميزة للمنحني السابق ؟

-2-

$$k_1 = |R''(s)|$$

لنوجد الوسيط الطبيعي: $s = \int_0^t |r'(\tau)|\,d\tau = \int_0^t \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau)}\,d\tau$

$$= \int_0^t \sqrt{1 + sh^2\frac{\tau}{a}}\,d\tau = \int_0^t \sqrt{ch^2\frac{\tau}{a}}\,d\tau = \int_0^t ch\frac{\tau}{a}\,d\tau = a\,sh\frac{t}{a}$$

$$s^2 = a^2 sh^2\frac{t}{a} \Rightarrow s^2 + a^2 = a^2 + a^2 sh^2\frac{t}{a} = a^2\left(1 + sh^2\frac{t}{a}\right)$$

$$= a^2 ch^2\frac{t}{a} \Rightarrow s^2 + a^2 = a^2 \cdot \frac{1}{ak_1} = \frac{a}{k_1} \Rightarrow$$

$$k_1 = \frac{a}{(s^2 + a^2)}$$

علاقات فرينيه:

معطى r

بالوسيط s

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = |r'| \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

r والوسيط t

السطح: تطبيق $R^2 \to R^3$

يعرف السطح بالمعادلات الوسيطية الآتية:

$$x = x(u,v)$$
$$y = y(u,v)$$
$$z = z(u,v)$$

المعادلة المتجهة للسطح: $\vec{r} = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$

$$\vec{r}_u = x_u\vec{i} + y_u\vec{j} + z_u\vec{k}$$
$$\vec{r}_v = x_v\vec{i} + y_v\vec{j} + z_v\vec{k}$$

تمرين: إذا كان لدينا معادلة سطح معطى بالشكل الآتي:

$$r = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$$

هل هذا السطح أملس؟

الحل:

$$x = u, \quad y = v$$
$$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$$
$$z^2 + x^2 + y^2 = 1$$

معادلة النصف العلوي من الكرة التي مركزها (0,0,0) ، $R=1$

$$r_u = \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{1-u-v}}\right), \quad r_v = \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{1-u-v}}\right)$$

هذه الدوال هي دوال مستمرة على D.

$$1-u^2-v^2 > 0, \quad D = \{(u,v);\ u^2+v^2 < 1\}$$

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ 0 & 1 & \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, 1\right)$$

مثال: أثبت أن سطح الطارة هو سطح نظامي

$$x = (a + b\sin v)\cos u$$
$$y = (a + b\sin v)\sin u$$
$$z = b\cos v$$

الحل:

$$r_u = \left(-(a+b\sin v)\sin u,\ (a+b\sin v)\cos u,\ 0\right)$$
$$r_v = \left(b\cos u\cos v,\ b\sin u\cos v,\ -b\sin v\right)$$

لأن الدوال $x(u,v), y(u,v), z(u,v) \in C^\infty$

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -(a+b\sin v)\sin u & (a+b\sin v)\cos u & 0 \\ b\cos u\cos v & b\sin u\cos v & -b\sin v \end{vmatrix}$$

$$= \Big[\underbrace{-b(a+b\sin v)\cos u\sin v}_{\sin v},\ \underbrace{-b(a+b\sin v)\sin u\sin v}_{\sin v},\ \underbrace{-b(a+b\sin v)\sin^2 u\cos v - b\cos^2 u\cos v(a+b\sin v)}_{-b(a+b\sin v)\cos v}\Big]$$

$$= -b(a+b\sin v)(\cos u, \sin u, \cos v)$$

$$|r_u \times r_v| = b(a+b\sin v) \neq 0$$

السطح الدوراني:

يكون السطح دوراني إذا أمكن كتابته بالشكل:

$$x = \phi(u)\cos v$$
$$y = \phi(u)\sin v$$
$$z = \psi(u)$$

المستوي المماس والمستقيم الناظم لسطح ما:

معادلة المستقيم الناظم:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u|_{(u_0,v_0)} & y_u|_{(u_0,v_0)} & z_u|_{(u_0,v_0)} \\ x_v|_{(u_0,v_0)} & y_v|_{(u_0,v_0)} & z_v|_{(u_0,v_0)} \end{vmatrix} = 0$$

المستقيم الناظم:

$$\frac{X-x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}} = \frac{Y-y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}} = \frac{Z-z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}}$$

تمرين: أوجد معادلة المستوي المماس والمستقيم الناظم عند النقطة $(1,1,0)$ للسطح المعطى؟ $r=(u, v^2, u^2-2v^2)$

$$\begin{vmatrix} X-1 & Y-1 & Z \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad r_u(1,0,2u)\Big|_{(1,1)} = (1,0,2)$$

$$; \quad r_v(0,1,-2v)\Big|_{(1,1)} = (0,1,-2)$$

$$-2(X-1)-(Y-1)(-2)+Z=0$$

معادلة المستوي المماس:

$$-2X+2Y+Z=0$$

معادلة المستقيم الناظم:

$$\frac{X-1}{-2} = \frac{Y-1}{2} = \frac{Z}{1}$$

تمرين: ليكن لدينا السطح التالي: $r=(u, v^2, u^2-v^2)$

أوجد المنحنيات ذات الوسيط u والمنحنيات ذات الوسيط v

$u=u_0$ $\quad v=v_0$

الحل:

منحنيات وسيط u: $r(u, v_0, u^2-v_0^2)$; $X=u \quad y=v_0 \quad \boxed{Z=X^2-2v_0^2}$

معادلة قطع مكافئ

منحنيات الوسيط v: $r(u_0, v, u_0^2-v^2)$ $\quad X=u_0 \quad y=v \quad \boxed{Z=u_0^2-y^2}$

معادلة قطع مكافئ